$\star$ $x > a \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(a) = 0$ car φ est $\searrow$ sur $]1;+\infty[$

D'où le tableau de signe de $\varphi(x)$.

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
signe($\varphi(x)$)		$-$	0	$+$	0	$-$	

2)a- la fonction qui à $x \mapsto x^2$ est continue sur IR et celle qui a $x \mapsto e^x-1$ est continue et non nul sur IR*

D'où la foction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ est continue sur IR*.

$\cdot \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2}{e^x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{0}{1} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ f est continue en 0.

Bilan : f est contnue sur IR.

b- la fonction qui à $x \mapsto x^2$ est dérivable sur IR et celle qui a $x \mapsto e^x-1$ est dérivable et non nul sur IR*

D'où la foction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ est dérivable sur IR*.

$\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$

$\Rightarrow$ f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

$\star$ $\forall x \in IR^*; f'(x) = \dfrac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x[e^x(2-x)-2]}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$.

c- $f(a) = \dfrac{a^2}{e^a-1}$. Or $\varphi(a)=0 \Leftrightarrow e^a(2-a)-2=0 \Leftrightarrow e^a = \dfrac{2}{(2-a)}$

Ainsi $f(a) = \dfrac{a^2}{\frac{2}{(2-a)}-1} = \dfrac{a^2}{\frac{2-(2-a)}{(2-a)}} = \dfrac{a^2(2-a)}{a} = a(2-a)$.

d- $\forall x \in IR^*; f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2} \Rightarrow \forall x \in IR^*; sig[f'(x)] = sig[x\varphi(x)]$

En tenant compte du signe $\varphi(x)$ et de x, on obtient le tableau suivant de variation de f

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	f(a)	$\searrow$	0

$\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x^2}{e^x-1}\right] = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.